Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»
Институт математики, экономики и информатики

Дискретный анализ и информатика

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. О. В. Кузьмина

Выпуск 5

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
2019

УДК 519.1:519.2
ББК 22.176
П75

Печатается по решению ученого совета
Института математики, экономики и информатики ИГУ

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук *М. В. Булатов*,
канд. физ.-мат. наук *А. А. Бутин*

П75 **Прикладные** задачи дискретного анализа: сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. – 143 с. – (Дискретный анализ и информатика ; вып. 5).
ISBN 978-5-9624-1715-8

Содержит статьи по различным разделам перечислительной комбинаторики и ее приложениям в дискретной математике и теории вероятностей.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

УДК 519.1:519.2
ББК 22.176

ISBN 978-5-9624-1715-8

Содержание

УДК 510.22:514.1

Применение детерминированных L-систем для построения фракталов

*Е. Ю. Кузьмина, М. В. Лавлинский**

Классические геометрические фракталы рассматриваются как теоретико-множественные объекты. Ряд свойств этих множеств визуализируется методами детерминированных L-систем. Приведены примеры использования фрактальной графики при описании биологических объектов.

Ключевые слова: формальные грамматики, детерминированные L-системы, снежинка Коха, кривые Гильберта, Пеано, Госпера, фрактальная графика, описание биологических объектов.

Введение

Существует тип сложных систем иерархического типа, для которых применим принцип масштабной иерархичности и всегда можно найти повторяющиеся структуры, элементы.

Геометрические модели природных объектов до сравнительно недавнего времени строились на основе простых фигур: прямых, прямоугольников, окружностей, сфер, многогранников. Однако этот набор, как можно заметить, трудно применим для описания сложных объектов, таких как турбулентный поток жидкости, пористые материалы, форма облаков, кровеносно-сосудистая система, крона дерева и т. д.

Поэтому необходимы были новые геометрические понятия и методы описания этих объектов. Одним из таких понятий и явилось понятие фрактала. Термин *фрактал* был впервые введен в 1975 г. Бенуа Мандельбротом, пионером в области фрактальной геометрии. Стоит отметить, что конструкции, подобные фрактальным, в той или иной форме появлялись задолго до этого в работах Георга Кантора, Карла Вейерштрасса, Джузеппе Пеано, Феликса Хаусдорфа и

* **Кузьмина Елена Юрьевна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики ИМЭИ ИГУ, e-mail: quzminov@mail.ru; **Лавлинский Максим Викторович**, учитель информатики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, e-mail: lavlinskimv@mail.ru.

др. [1]. Тем не менее именно Мандельброт объединил эти идеи и положил начало систематическому изучению фракталов и их приложений. Важную роль в распространении этих идей сыграла книга Мандельброта «Фрактальная геометрия природы» [2].

Основной идеей новой геометрии является идея *самоподобия*, т. е. фрактальные структуры при различном увеличении не претерпевают в среднем значительных изменений. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветви поменьше и т. д. То же самое можно заметить, рассматривая горный рельеф, кровеносную систему человека и др. В отличие от евклидовой геометрии, которая рассматривает гладкие объекты, фрактальная геометрия рассматривает нерегулярные, сильно изломанные, изрезанные объекты. Для фрактальных кривых не существует понятия касательной, так как эти кривые в общем случае недифференцируемые.

1. Геометрические фракталы

Именно с геометрических фракталов началась история фракталов. Это и есть те функции-монстры, которых так называли за недифференцируемость в каждой точке. Геометрические фракталы являются также самыми наглядными, так как сразу видна самоподобность. Вообще все геометрические фракталы обладают так называемой жесткой самоподобностью, не изменяющейся при изменении масштаба. Для построения геометрических фракталов характерно задание *основы* и *фрагмента*, повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Поэтому эти фракталы иногда называют *конструктивными* или автомодельными. Примерами таких фракталов являются треугольник Серпинского, снежинка Коха, кривая Леви и многие другие. Конструктивные фракталы строятся с помощью рекурсивных процедур, систем итерированных функций, L-систем и др. [3; 4].

Геометрические фракталы хороши тем, что, с одной стороны, являются предметом достаточного серьезного научного изучения, а с другой стороны, даже человек, далекий от математики, найдет в них что-то полезное для себя [5; 6]. Такое сочетание редко в современной математике, где все объекты задаются с помощью непонятных слов и символов. Многие геометрические фракталы можно нарисовать буквально на листочке бумаги в клетку.

Фракталы этого типа строятся поэтапно. Сначала изображается *основа*. Затем некоторые части основы заменяются на *фрагмент*. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Когда изменения становятся визуально незаметными, считают, что построенная фигура хорошо *приближает* фрактал и дает представление о его форме. Для получения самого фрактала нужно *бесконечное число этапов*. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов [7–10].

2. Системы Линденмайера

L-система, или система Линденмайера, – это параллельная система переписывания и вид формальной грамматики. L-система состоит из алфавита символов, которые могут быть использованы для создания строк, набора порождающих правил, которые задают правила подстановки вместо каждого символа, начальной строки («аксиомы»), с которой начинается построение, и механизма перевода образованной строки в геометрические структуры [11].

L-системы предложил в 1968 г. Аристид Линденмайер, венгерский биолог и ботаник из Утрехтского университета. Он использовал L-системы для описания поведения клеток растений и моделирования процесса развития растения.

Однако позже выяснилось, что с их помощью можно строить многие известные фракталы: снежинку Коха, треугольник и ковер Серпинского, кривые Пеано и т. п. Но главное, что L-системы открывают путь к бесконечному разнообразию новых фракталов, что и послужило причиной их широкого применения в компьютерной графике для построения фрактальных деревьев и растений. Рассмотренные в данной статье L-системы ограничиваются случаем детерминированных L-систем и графикой на плоскости [Там же].

Для графической реализации L-систем в качестве подсистемы вывода используется так называемая тертл-графика (от англ. *turtle* – черепаха). При этом точка (черепашка) движется по экрану *дискретными* шагами, прочерчивая свой след, но, при необходимости, может перемещаться и без рисования. В нашем распоряжении имеются три параметра ($x; y; a$), где ($x; y$) – координаты черепашки, a – направление, в котором она смотрит. Черепашка интерпретирует и выполняет последовательность команд, задаваемых кодовым словом, буквы которого читаются слева направо. Кодовое слово представляет собой результат работы L-системы и может включать следующие буквы и знаки:

F – переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след.

B – переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след.

[– открыть ветвь.

] – закрыть ветвь.

+ – увеличить угол a на величину q.

- – уменьшить угол a на величину q.

Размер шага и величина приращения по углу q задаются заранее и остаются неизменными для всех перемещений черепашки. Если начальное направление движения a (угол, отсчитываемый от положительного направления оси X) не указано, то считается равным нулю.

Например, F++F++F – это равносторонний треугольник, если угол поворота равен π/3, а F+F+F+F – это квадрат, если угол поворота равен π/2.

3. L-системы и построение фракталов

Больший интерес представляет построение фракталов с помощью системы Линденмайера. Фракталы – самоподобные фигуры, следовательно, и сценарии L-систем у них должны быть самоподобны. Абсолютного самоподобия мы не добьёмся, но несколько шагов реализовать можно [2; 12].

Берётся начальная фигура (называется *аксиома*), например F++F++F с углом π/3. Задаётся правило замены F (называется правило newF), например newF = F-F++F-F; В имеющейся фигуре все F заменяются на newF. В нашем примере получим F-F++F-F++F-F++F-F++ F-F++F-F. Повторяем предыдущий шаг N раз. На втором шаге мы получим F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F. И так далее. В итоге получим сценарий для снежинки Коха N-го порядка (рис. 1) [2; 5; 12].

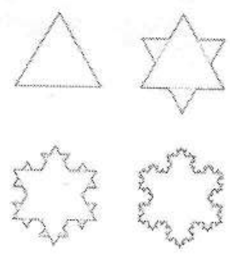


Рис. 1. Снежинка Коха

Для компьютерной реализации L-систем будем использовать свободно распространяемую Java-программу моделирования L-систем – MKokh (рис. 2). В основе работы программы лежат итерационные подстановочные модификации исходной формулы черепашьей графики.

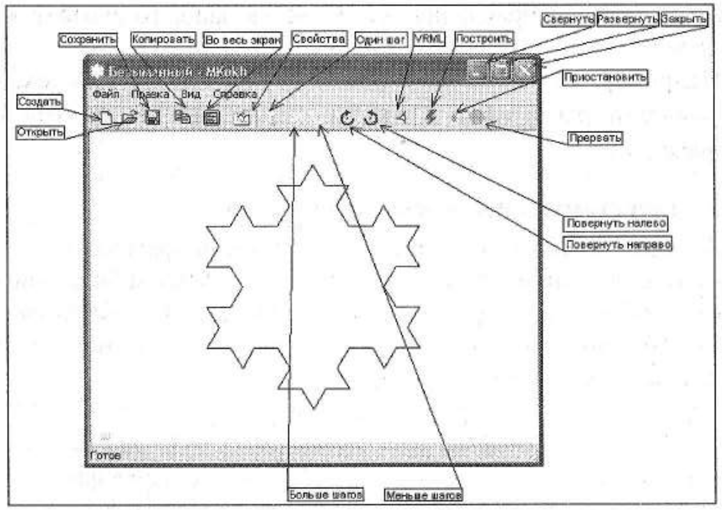
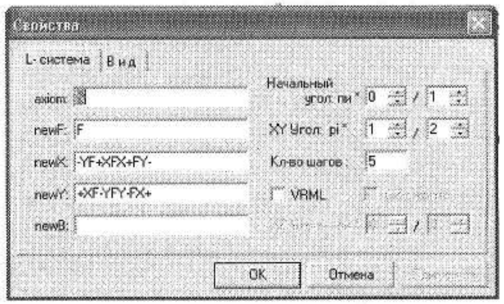
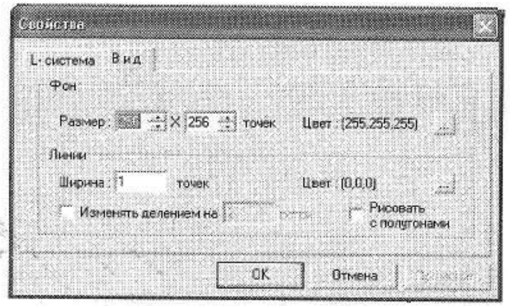


Рис. 2. Главное окно приложения MKokh

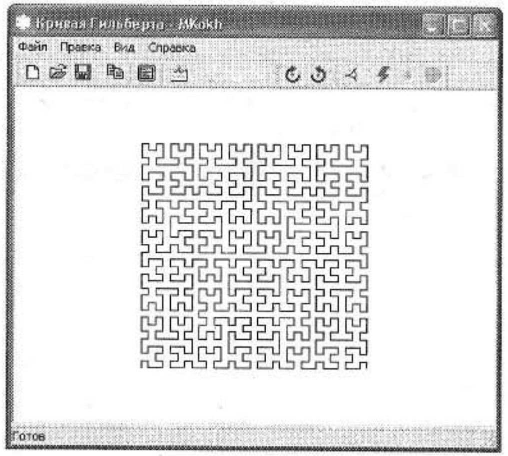
4. Примеры построения фракталов

Пример 1. *Построение фрактала «Кривая Гильберта»*
Настройка свойств L-системы:

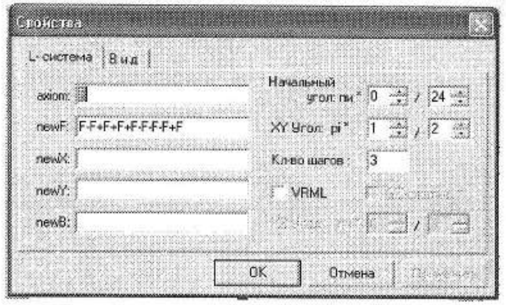




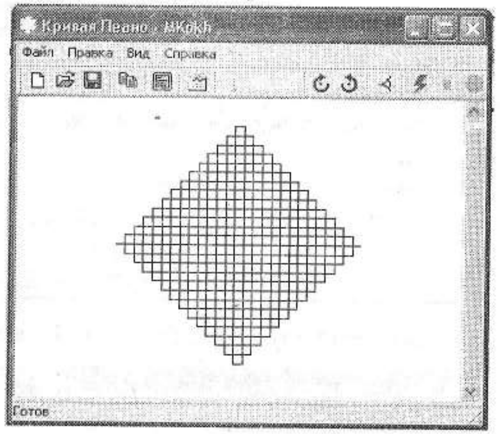
В результате должен получиться фрактал (5 шагов построения):



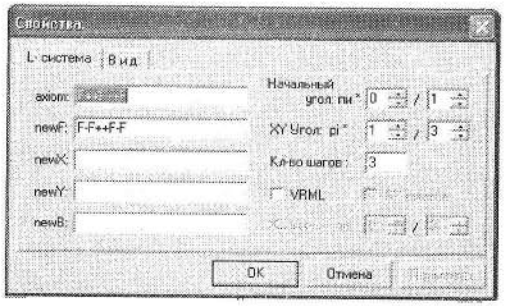
Пример 2. *Построение фрактала «Кривая Пеано».*
Настройка свойств L-системы:



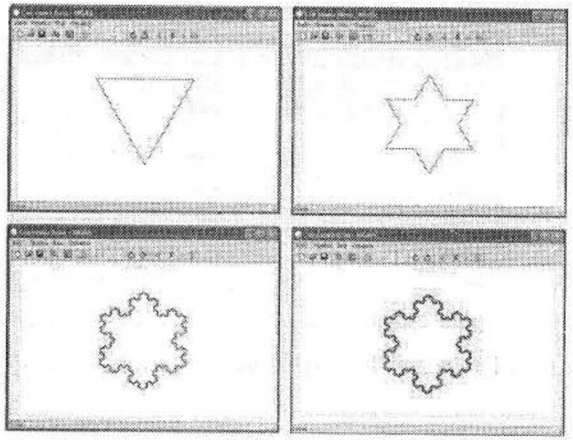
В результате должен получиться фрактал (3 шага построения):



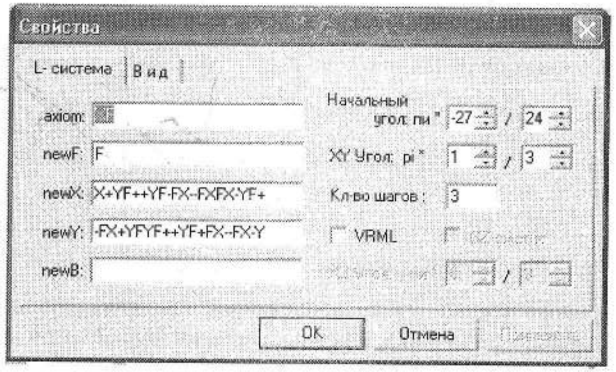
Пример 3. *Построение фрактала «Снежинка Коха»*
Настройка свойств L-системы:



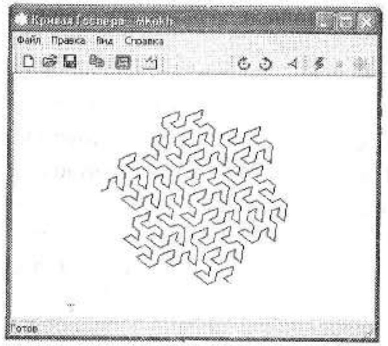
В результате должен получиться фрактал:



Пример 4. *Построение фрактала «Кривая Госпера»*
Настройка свойств L-системы:

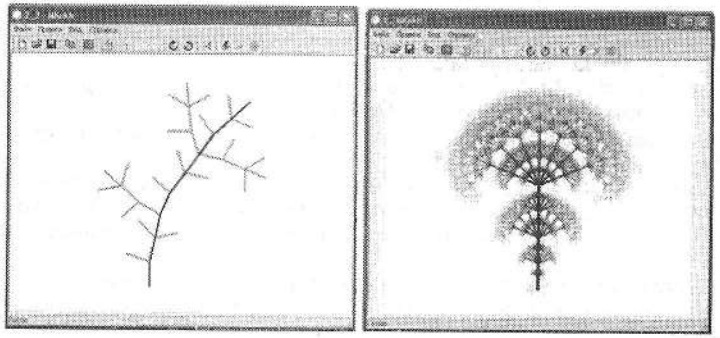


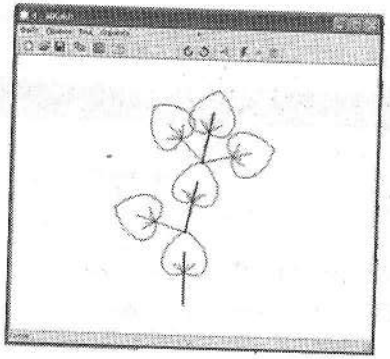
В результате должен получиться фрактал (3 шага построения):



Фрактальная графика с успехом может применяться для получения изображений деревьев, кустов, береговых линий и т. д.

Пример 5. *Установление взаимосвязи с биологией*





Таким образом, графика, основанная на геометрических фракталах, может быть использована в биологии. Можно рисовать различные биологические объекты, иллюстрируя самоподобие составляющих их элементов. А ещё можно демонстрировать протекание некоторых биологических процессов во времени.

Заключение

В конце 1980-х гг. L-системы использовались для визуализации моделей растений. Сейчас возможности компьютеров ушли далеко вперед. Многие игры и инструменты 3d-моделирования используют процедурную генерацию контента, в том числе и L-системы. Как следствие, из набора простых правил можно получить большое количество разных интересных объектов, например таких как фракталы.

Литература

1. Герега А. Н. Конструктивные фракталы в теории множеств. Канторовы дисконтинуумы и континуумы Серпинского. Одесса : Освита Украины, 2017. 83 с.

2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М. : Ин-т компьютер. исслед., 2002. 656 с.

3. Балханов В. К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления / отв. ред. Ю. Б. Башкуев. Улан-Удэ : Изд-во Бурят. ун-та, 2013. 224 с.

4. Перерва Л. М., Юдин В. В. Фрактальное моделирование : учеб. пособие / общ. ред. В. Н. Гряника. Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2007. 186 с.

5. Саква Д. Ю. Фракталы вокруг нас [Электронный ресурс]. URL: http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around/.

6. Ализар А Фракталы. Геометрия природы [Электронный ресурс]. URL: http://www.kv.by/index1997192001.htm.

7. Кузьмин О. В., Малакичев А. О. О некоторых алгоритмах построения фрактальных графов // Комбинаторные и вероятностные проблемы дискретной математики : сб. науч. тр. Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2010. Вып. 4 : Дискретный анализ и информатика. С. 64–70.

8. Кузьмин О. В., Малакичев А. О. Моделирование геометрических фракталов с помощью бесконечных графов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. Вып. 35. С. 79–82.

9. Кузьмин О. В., Малакичев А. О. Комбинаторная модель фрактальной перколяции плоских структур // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. Вып. 1 (41). С. 23–27.

10. Кузьмин О. В., Старков Б. А. Фрактальные свойства бинарных матриц, построенных при помощи арифметики треугольника Паскаля, и помехоустойчивое кодирование структур // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. Вып. 4 (52). С. 138–142.

11. Швец А. Н. L-системы [Электронный ресурс]. URL: http://mech.math.msu.su/~shvetz/54/inf/ perl-problems/chLSystems.xhtml.

12. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов. М. : Ин-т компьютер. исслед., 2002. 160 с.

The Use of Deterministic L-systems for the Construction of Fractals

E. Yu. Kuzmina, M. V. Lavlinsky

Classical geometric fractals are considered as set-theoretic objects. A number of properties of these sets are visualized by the methods of deterministic L-systems. Examples of the use of fractal graphics in the description of biological objects are given.

Keywords: formal grammars, deterministic L-systems, Koch snowflake, Hilbert, Peano curves, Gosper, fractal graphics, description of biological objects.
