Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий

Дискретный анализ и информатика
Выпуск 6

ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. О. В. Кузьмина

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
2020

УДК 519.1:519.2
ББК 22.176
П75

Печатается по решению ученого совета ИМИТ ИГУ

П75 **Прикладные** вопросы дискретного анализа : сб. науч. тр. / ред. О. В. Кузьмина. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2020. – 99 с. – (Дискретный анализ и информатика ; вып. 6).
ISBN 978-5-9624-1809-4

Содержит статьи по различным разделам перечислительной комбинаторики и ее приложениям в дискретной математике и теории вероятностей.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

УДК 519.1:519.2
ББК 22.176

ISBN 978-5-9624-1809-4

Содержание

ОТ РЕДАКТОРА ....

Аталян А. В., Белых А. А., Кузьмин О. В.
Алгоритмы построения дерева решений CART и CTree: выявление однородных подмножеств в прикладных задачах 7

Гильманшин Р. Р.
Необходимое условие валидности Хеша заголовка блока биткоин 13

Захаров Д. В.
Об особенностях применения реляционной интерактивной логики для анализа объектно-ориентированных баз данных 19

Иванчишин В. Б.
Метод расчета количеств простых чисел и близнецов в интервалах натурального ряда 26

Колокольникова Н. А.
Использование одной комбинаторной схемы для описания случайных размещений 37

Кузьмин О. В., Погодаева Е. Н.
Полиномы Тушара: свойства и приложения 46

Кузьмин О. В., Старков Б. А.
Бинарные матрицы, сформированные при помощи обобщения треугольника паскаля, и производные дискретные объекты 56

Кузьмина Е. Ю., Кузьмин О. В., Лавлинский М. В.
Изучение алгоритмов на графах при помощи демонстрационных учебных моделей...63

Лавлинская А. А., Филь Г. А., Камнев М. Д.
Создание модели квадрокоптера-эколога 78

Малахов Е. И.
Применение метода отражений для задач о случайном блуждании на полупрямой с поглощающим или отражающим экраном .. 84

Егорычев Г. П., Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Филлипов К. А.
О регулярных подстановках и перманентах 91

Contents

From the Editor

A. V. Atalyan, A. A. Belyh, O. V. Kuzmin	METHODS CART AND CTREE IN BUILDING DECISION TREES FOR IDENTIFYING HOMOGENEOUS SUBSETS IN APPLIED TASKS
R. R. Gilmanshin	PREREQUISITE FOR VALIDITY OF BITCOIN BLOCK HEADER HASH
D. V. Zakharo	ABOUT FEATURES OF APPLICATION OF RELATIONAL INTERACTIVE LOGIC FOR ANALYSIS OBJECT-ORIENTED DATABASES 19
V. B. Ivanchishin	METHOD FOR CALCULATING THE NUMBER OF PRIME NUMBERS AND TWINS IN THE INTERVALS OF THE RANGE OF NATURAL NUMBERS
N. A. Kolokolnikova	USING A SINGLE COMBINATORIAL SCHEME TO DESCRIBE RANDOM ALLOCATIONS
O. V. Kuzmin, E. N. Pogodaeva	TUSHAR POLYNOMIALS: PROPERTIES AND APPLICATIONS
O. V. Kuzmin, B. A. Starkov	BINARY MATRICES GENERATED BY PASCAL TRIANGLE GENERALIZATION, AND DISCRETE DERIVATIVES
E. Yu. Kuzmina, O. V. Kuzmin, M. V. Lavlinsky	STUDYING ALGORITHMS ON GRAPHS BY USING DEMO TRAINING MODELS
A. A. Lavlinskaya, G. A. Fil, M. D. Kamnev	CREATION OF A QUADROCOPTER-ECOLOG MODEL
E. I. Malahov	USING A METHOD OF REFLECTION FOR THE RANDOM WALK PROBLEMS ON THE SEMI LINE WITH ABSORBING OR REFLECTING BOUNDARY
G. P. Egorythev, T. A. Shiryaeva, A. K. Shlepkin, K. A. Filippov	ABOUT REGULAR PERMUTATIONS AND PERMANENTS

УДК 373.167.1:519.1:004.9

ИЗУЧЕНИЕ АЛГОРИТМОВ НА ГРАФАХ ПРИ ПОМОЩИ ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ УЧЕБНЫХ МОДЕЛЕЙ

Е. Ю. Кузьмина[1], *О. В. Кузьмин*[2], *М. В. Лавлинский*[3]

Аннотация. Рассматривается возможность применения демонстрационных учебных моделей программного комплекса по разделу «Введение в теорию графов» при изучении алгоритмов на графах: обход графа, поиск кратчайшего остова и поиск кратчайшего пути.

Ключевые слова: теория графов, программный комплекс, обход графа, кратчайший остов, кратчайший путь, поиск в глубину, поиск в ширину, алгоритм Прима, алгоритм Краскала, алгоритм Дейкстры, алгоритм Флойда – Уоршелла.

STUDYING ALGORITHMS ON GRAPHS BY USING DEMO TRAINING MODELS

E. Yu. Kuzmina, O. V. Kuzmin, M. V. Lavlinsky

Abstract. The possibility of applying the demonstration training models of the software package for the section “Introduction to graph theory” in the study of graph algorithms is considered: graph traversal, search for the shortest frame and search for the shortest path.

Keywords: Graph theory, software package, graph traversal, shortest skeleton, shortest path, depth search, breadth-first search, Prym algorithm, Kraskal algorithm, Dijkstra algorithm, Floyd–Warshell algorithm.

Отправной точкой в развитии теории графов считается 1736 г. В этом году российский ученый швейцарского происхождения Леонард Эйлер сформулировал решение задачи о кёнигсбергских мостах. Выдающийся ученый нашел и обосновал правило для решения задачи, которое стало первым положением теории графов. Правда, сам термин «граф», который ввел английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр, появился только в 1878 г. [3; 6; 15].

[1] **Кузьмина Елена Юрьевна**, канд. физ.-мат. наук, директор, учитель математики, МАОУ Лицей ИГУ, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики, ИМИТ ИГУ (quzminov@mail.ru)

[2] **Кузьмин Олег Викторович**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой теории вероятностей и дискретной математики, ИМИТ ИГУ(quzminov@mail.ru)

[3] **Лавлинский Максим Викторович**, учитель информатики и математики, МАОУ Лицей ИГУ (lavlinskimv@mail.ru)

На современном этапе развития теория графов находит широкое применение в различных науках и сферах жизни: математике, информатике, химии, биологии, физике, экономике и т. д. [1; 2; 14]. Поэтому не удивительно, что графы начинают изучать уже в школе, а задачи с ними встречаются в государственных экзаменах по информатике. Например, в основном государственном экзамене по информатике (ОГЭ) это задания 3 и 11, в едином государственном экзамене по информатике (ЕГЭ) задания 3, 15, 22 и 26 [4; 5].

Как правило, основы теории графов включаются в базовый курс информатики, но очевидно, что в рамках одного, двух или даже трёх уроков, предусмотренных образовательными программами, сложно сформировать у учащихся достаточный уровень компетенций. В Лицее ИГУ г. Иркутска эта проблема решается введением дополнительного учебного курса «Дискретная математика» (вариативная часть учебного плана), в котором один из разделов – «Теория графов» [12]. Также возможно увеличение часов на изучение теории графов в классах с углубленным изучением информатики.

Однако даже если необходимые часы на изучение раздела будут найдены, у учителя могут возникнуть проблемы, связанные с недостаточным количеством учебно-методической литературы. Поэтому для курса «Дискретная математика» нами был разработан программный комплекс по разделу «Введение в теорию графов» (рис. 1) [11; 13; 16]. Получить доступ к данной разработке можно по следующей ссылке: https://cloud. mail. ru/public/3g8y/3L2ZmuPCg.

Рис. 1. Стартовое окно и меню выбора учебных моделей
программного комплекса к элективному курсу «Дискретная математика»
по разделу «Введение в теорию графов»

В данной статье мы рассмотрим возможность применения демонстрационных учебных моделей программного комплекса по разделу «Введение в теорию графов» при изучении алгоритмов на графах.

Демонстрационная учебная модель «Обходы графов»

Обход графа – систематический перебор вершин графа такой, что каждая вершина просматривается только один раз [7; 8].

Предполагается, что учащиеся перед применением учебной модели знакомятся с необходимой теорией по обходам графа, например используя теоретические блоки рассматриваемого программного комплекса (рис. 2–4).

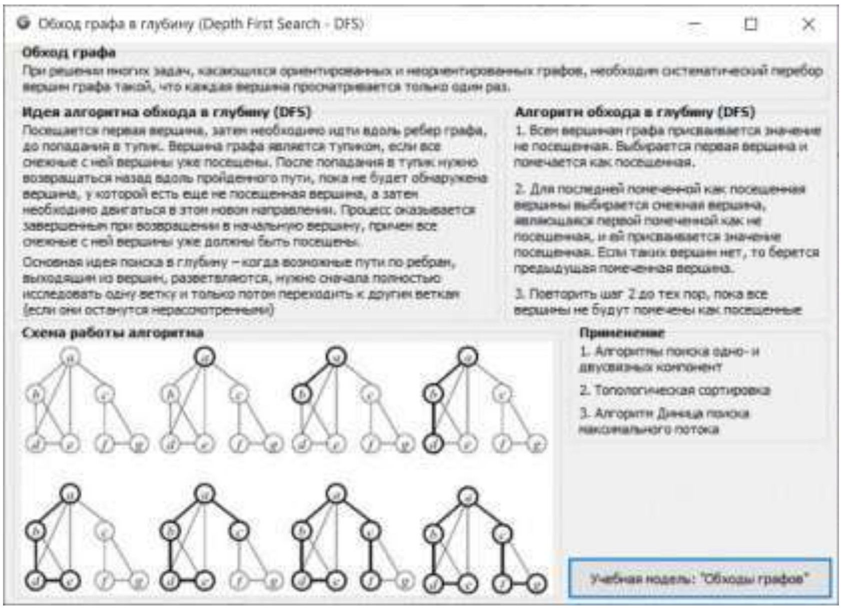

Рис. 2. Окно «Обход графа в глубину (DFS)»

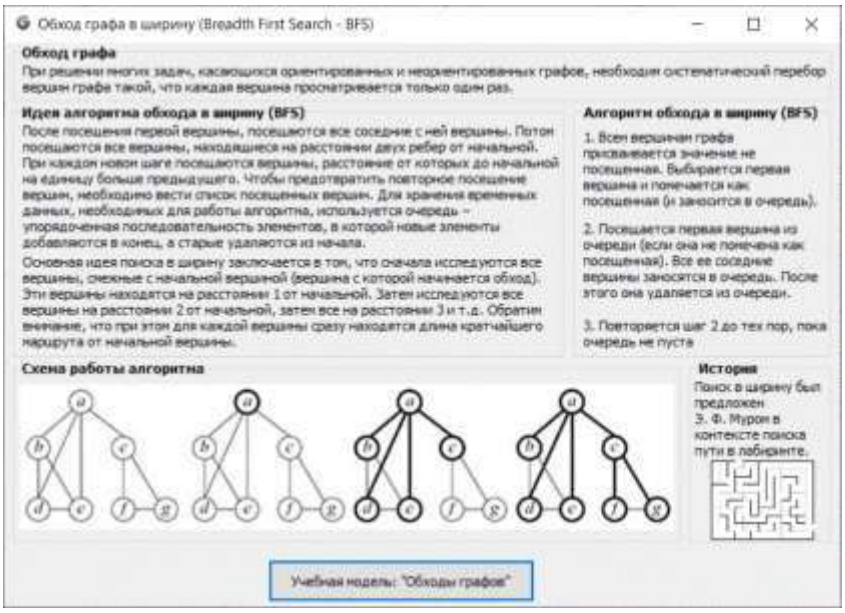

Рис. 3. Окно «Обход графа в ширину (BFS)»

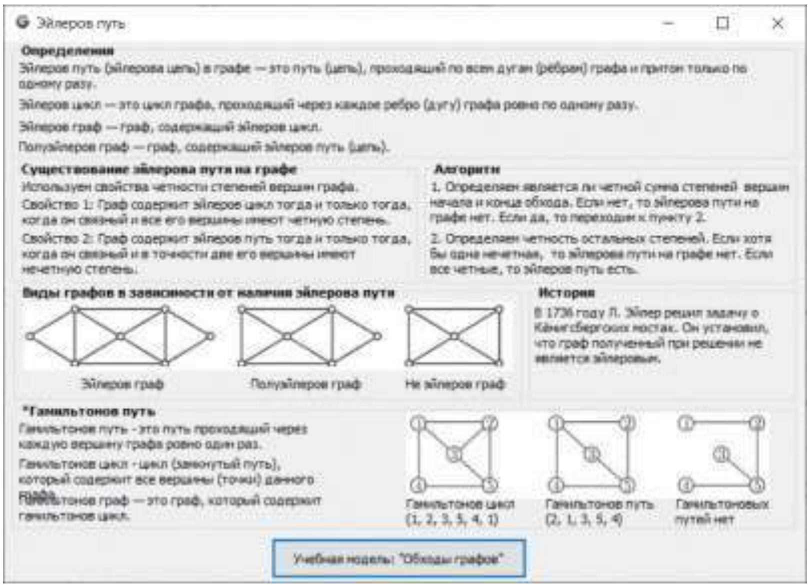

Рис. 4. Окно «Эйлеров путь»

После открытия стартового окна модели «Обходы графов» (Рис. 5. у пользователя появится возможность создать случайный граф либо использовать имеющуюся матрицу смежности для конкретной задачи, предварительно сохранив её в txt-формате (Рис. 6.).

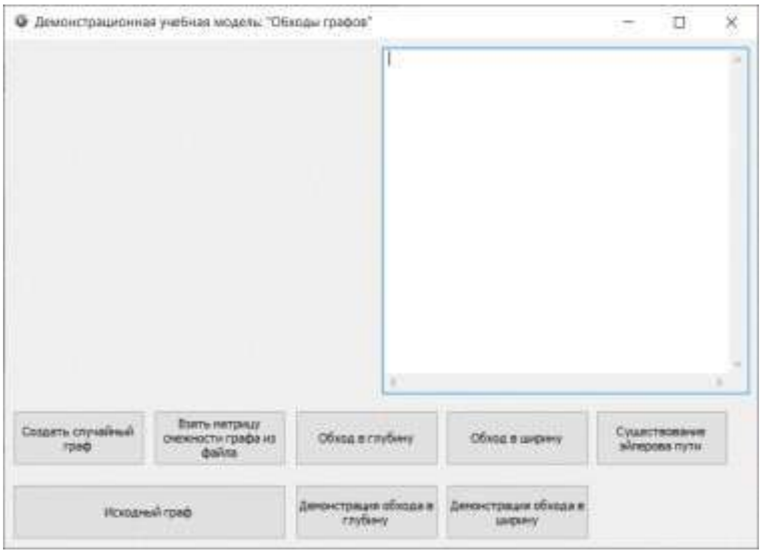

Рис. 5. Стартовое окно модели «Обходы графов»

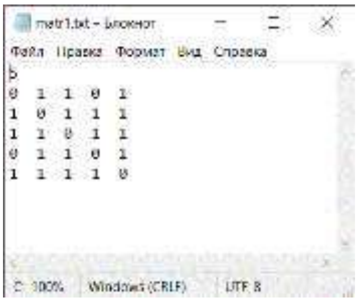

Рис. 6. Пример матрицы смежности для графа
с 5 вершинами, сохраненной в txt-формате

После того как выбран способ создания графа, мы получим его визуализацию в левой части и матрицу смежности в правой части окна программы (рис. 7). Теперь можно перейти к реализации алгоритмов обхода графа.

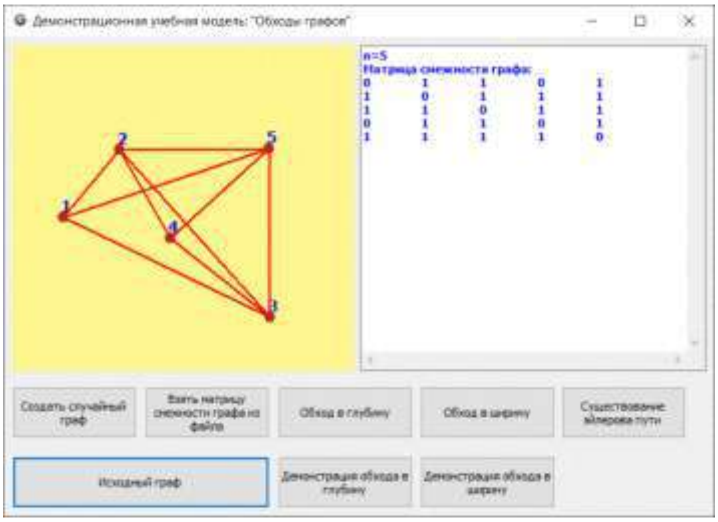

Рис. 7. Визуализация графа с 5 вершинами

Поиск в глубину

Идея алгоритма обхода в глубину (Depth First search, DFS) в том, что сначала посещается первая вершина, затем необходимо идти вдоль рёбер графа до попадания в тупик. Вершина графа является тупиком, если все смежные с ней вершины уже посещены. После попадания в тупик нужно возвращаться назад вдоль пройденного пути, пока не будет обнаружена вершина, у которой есть ещё смежная непосещённая вершина, а затем необходимо двигаться в этом направлении. Алгоритм будет завершён после возвращения в начальную вершину [7; 8].

Рассмотрим, как учитель сможет показать данный алгоритм с помощью учебной модели (см. рис. 7). После нажатия на кнопку «Обход в глубину» нужно будет выбрать номер вершины для начала обхода. Выберем, например, вершину «1» (рис. 8). В результате получим последовательность вершин графа для обхода в глубину (рис. 9). Далее можно продемонстрировать обход пошагово с помощью кнопки «Демонстрация обхода в глубину». Произойдёт изменение окраски вершин графа в зависимости от шага алгоритма (рис. 10). Далее учитель может изменить начальную вершину графа, задать граф-дерево или несвязный граф и продемонстрировать особенности обхода в данных случаях.

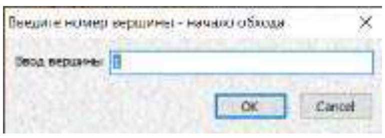

Рис. 8. Диалоговое окно для ввода вершины алгоритма обхода графа в глубину

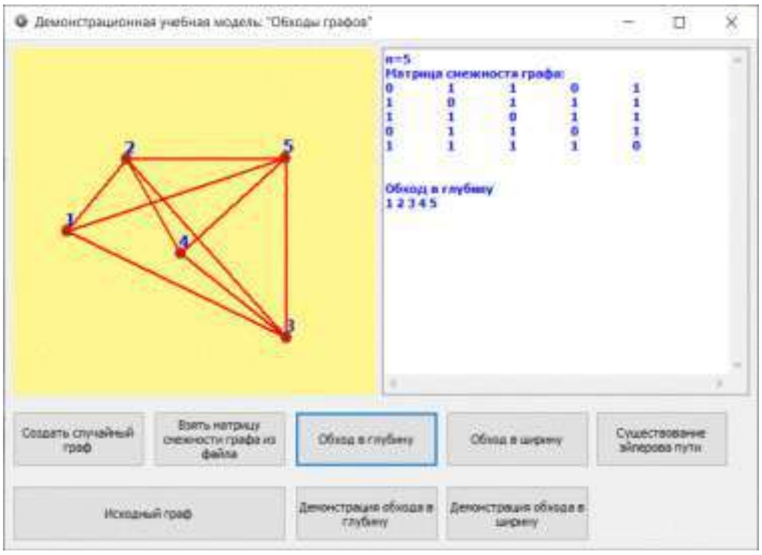

Рис. 9. Результат работы алгоритма обхода в глубину

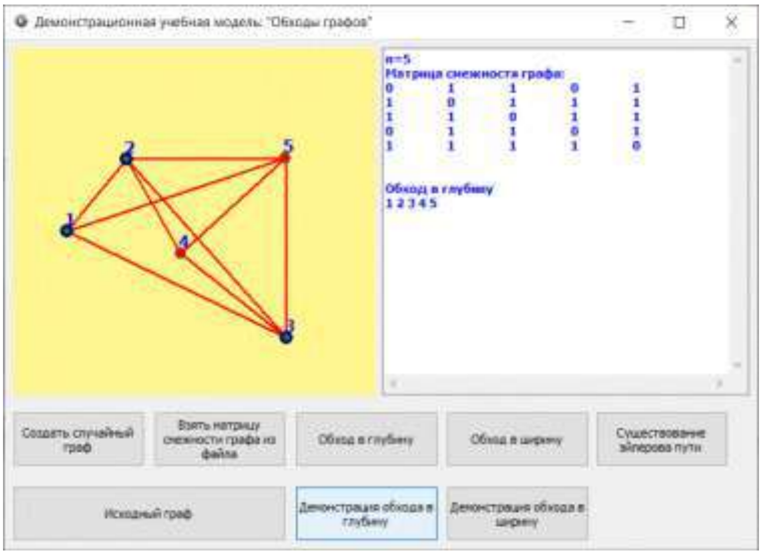

Рис. 10. Демонстрация обхода в глубину

Поиск в ширину

Идея алгоритма обхода в ширину (Breadth First Search, BFS) состоит в том, что после посещения первой вершины посещаются все соседние с ней вершины. Потом посещаются все вершины, находящиеся на расстоянии двух ребер от начальной. При каждом новом шаге посещаются вершины, расстояние от которых до начальной на единицу больше предыдущего [7; 8].

Рассмотрим, как учитель сможет показать данный алгоритм с помощью учебной модели (см. рис. 7). После нажатия на кнопку «Обход в ширину» нужно будет выбрать номер вершины для начала обхода. Выберем, например, вершину «1» (рис. 8). В результате получим последовательность вершин графа для обхода в ширину (рис. 11). Далее можно продемонстрировать обход пошагово с помощью кнопки «Демонстрация обхода в ширину». Произойдёт изменение окраски вершин графа в зависимости от шага алгоритма. Далее учитель может изменить начальную вершину графа, задать граф-дерево или несвязный граф и продемонстрировать особенности обхода в данных случаях.

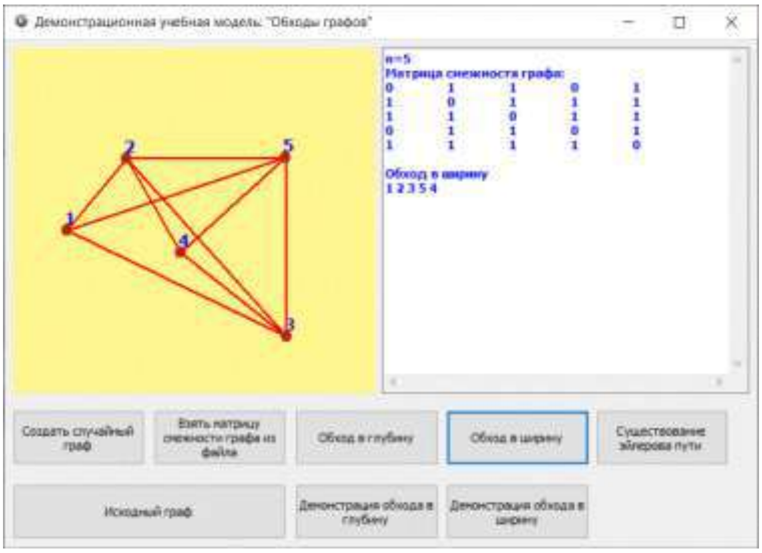

Рис. 11. Результат работы алгоритма обхода в ширину

Эйлеров путь

В демонстрационную учебную модель «Обходы графов» добавлена также возможность определения существования эйлерова пути, т. е. пути, проходящего по всем рёбрам графа, и притом только по одному разу. Таким образом, можно сразу продемонстрировать применение алгоритмов для обхода графов (рис. 12).

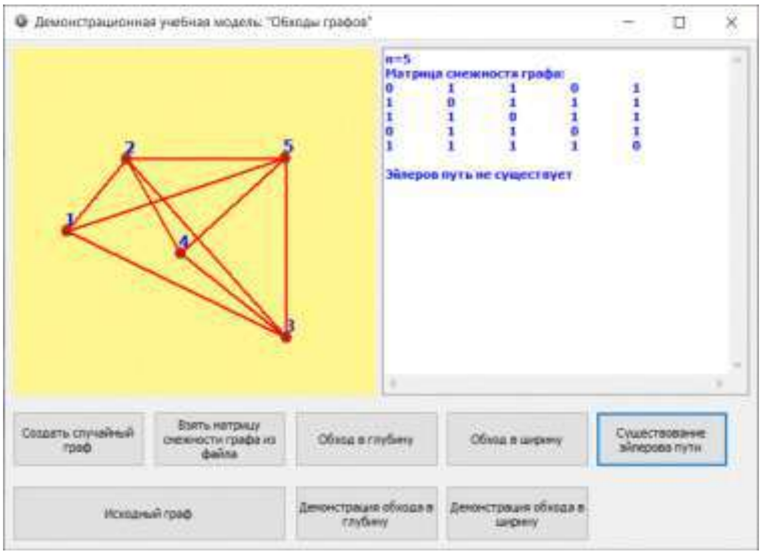

Рис. 12. Результат работы алгоритма определения существования эйлерова пути

Демонстрационная учебная модель «Кратчайшие остовы»

В связном взвешенном неориентированном графе кратчайший остов – остовное дерево этого графа, имеющее минимальный возможный вес, где под весом дерева понимается сумма весов входящих в него ребер.

Предполагается, что учащиеся перед применением учебной модели знакомятся с необходимой теорией по кратчайшим остовам, например используя теоретические блоки рассматриваемого программного комплекса (рис. 13–15).

Переходим в демонстрационную учебную модель «Кратчайшие остовы». Создадим граф, заданный случайным образом (Рис. 16.). Теперь можно перейти к реализации алгоритмов Прима и Краскала для поиска кратчайших остовов.

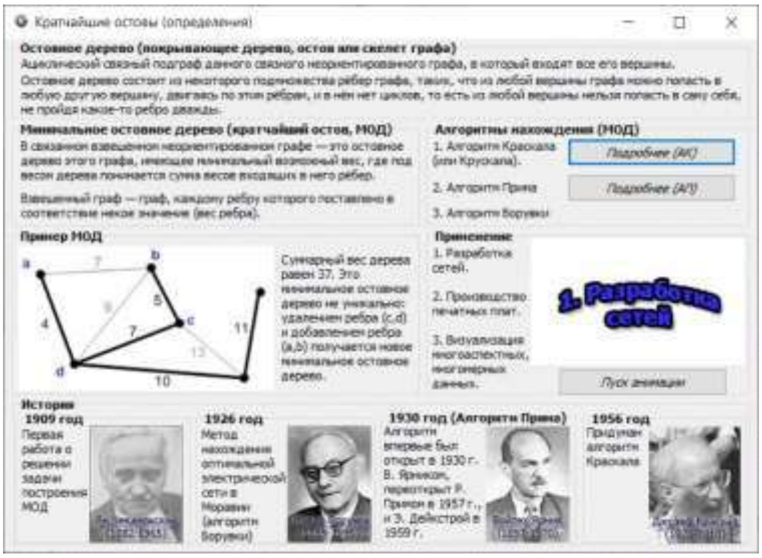

Рис. 13. Окно «Кратчайшие остовы (определения)»

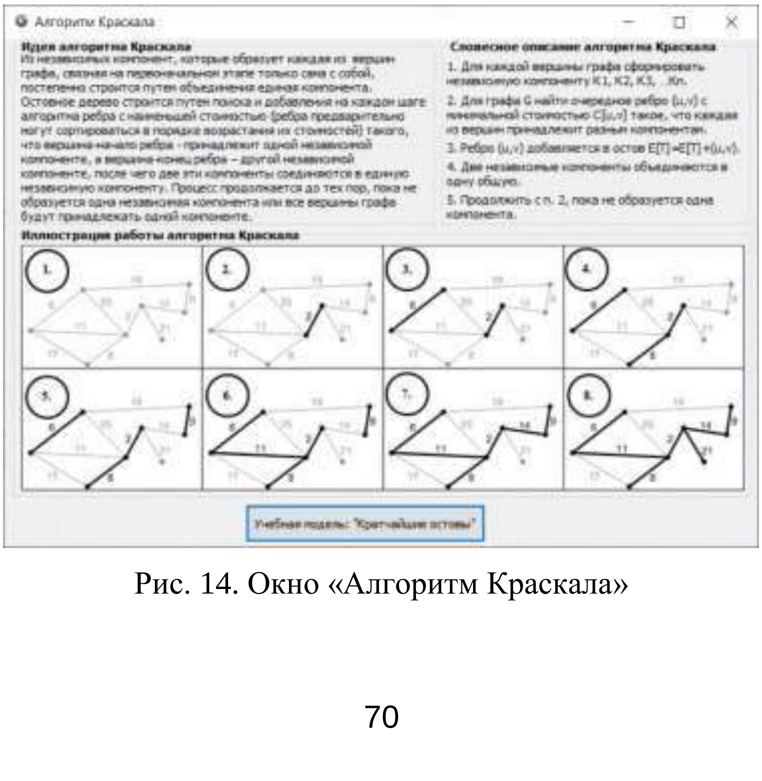

Рис. 14. Окно «Алгоритм Краскала»

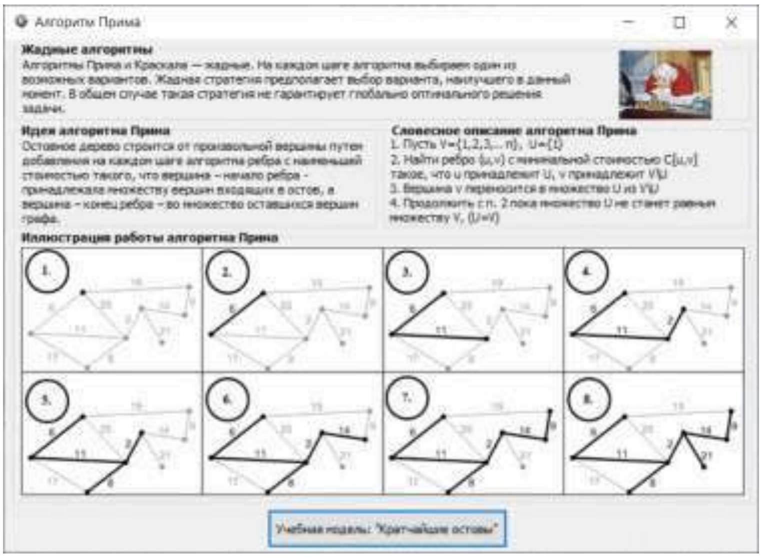

Рис. 15. Окно «Алгоритм Прима»

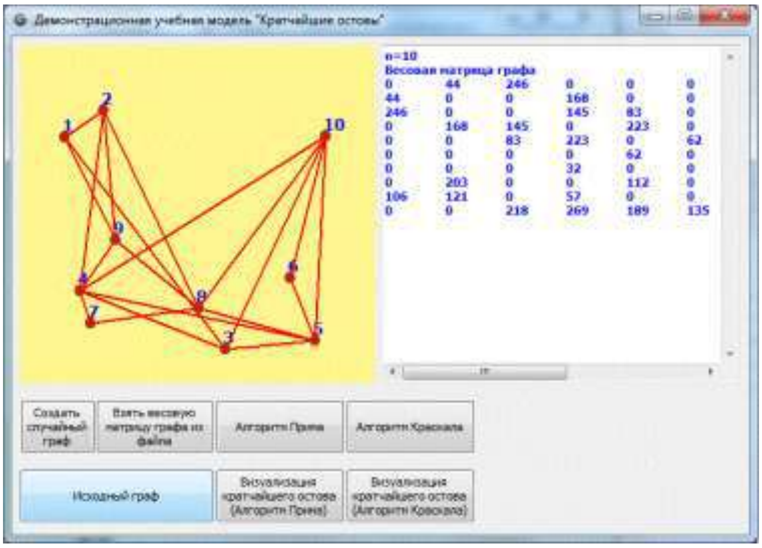

Рис. 16. Визуализация графа с 10 вершинами,
созданного случайным образом

Алгоритм Прима

Идея алгоритма состоит в том, что сначала берётся произвольная вершина и находится ребро, инцидентное данной вершине и обладающее наименьшей стоимостью. Найденное ребро и соединяемые им две вершины образуют дерево. Далее рассматриваются рёбра графа, один конец которых уже принадлежащая дереву вершина, а другой – нет; из этих рёбер выбирается ребро наименьшей стоимости. Выбираемое на каждом шаге ребро присоединяется к дереву. Рост дерева происходит до тех пор, пока не будут исчерпаны все вершины исходного графа.

В учебной модели есть возможность получить рёбра кратчайшего остова и их вес, вес кратчайшего остова, количество сравнений и присваиваний (рис. 17), а также визуализацию кратчайшего остова (рис. 18).

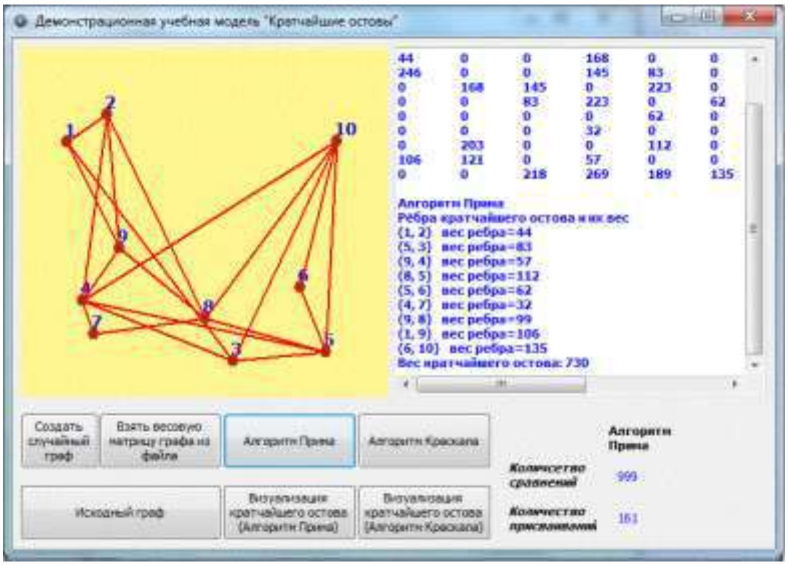

Рис. 17. Результат работы алгоритма Прима

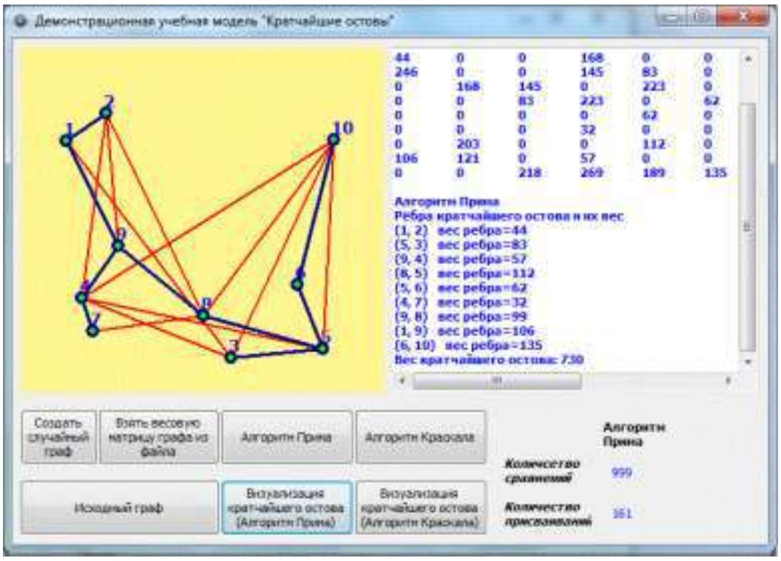

Рис. 18. Визуализация кратчайшего остова, найденного при помощи алгоритма Прима

Алгоритм Краскала

Вначале текущее множество рёбер устанавливается пустым. Затем, пока это возможно, проводится следующая операция: из всех рёбер, добавление которых к уже имеющемуся множеству не вызовет появление в нём цикла, выбирается ребро минимального веса и добавляется к уже имеющемуся множеству. Когда таких рёбер больше нет, алгоритм завершён. Подграф данного графа, содержащий все его вершины и найденное множество рёбер, является его остовным деревом минимального веса.

В учебной модели есть возможность получить рёбра кратчайшего остова и их вес, вес кратчайшего остова, количество сравнений и присваиваний (рис. 19), а также визуализацию кратчайшего остова (рис. 20).

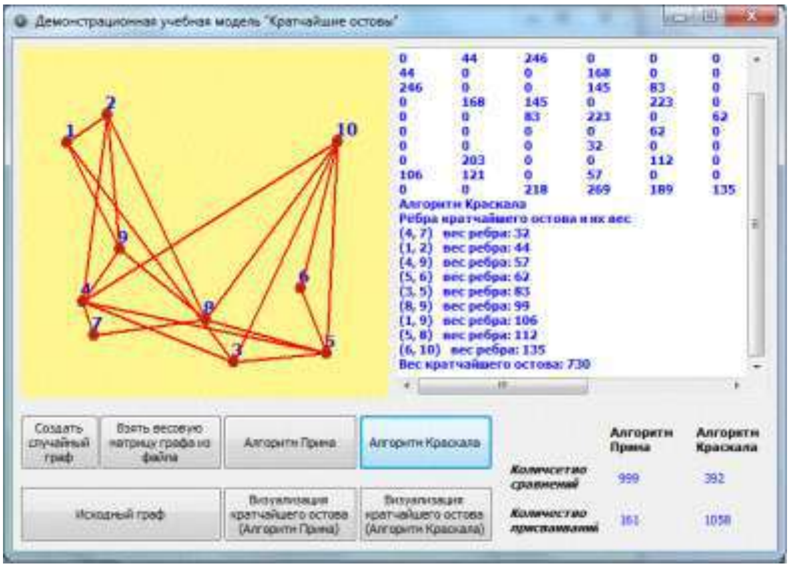

Рис. 19. Результат работы алгоритма Краскала

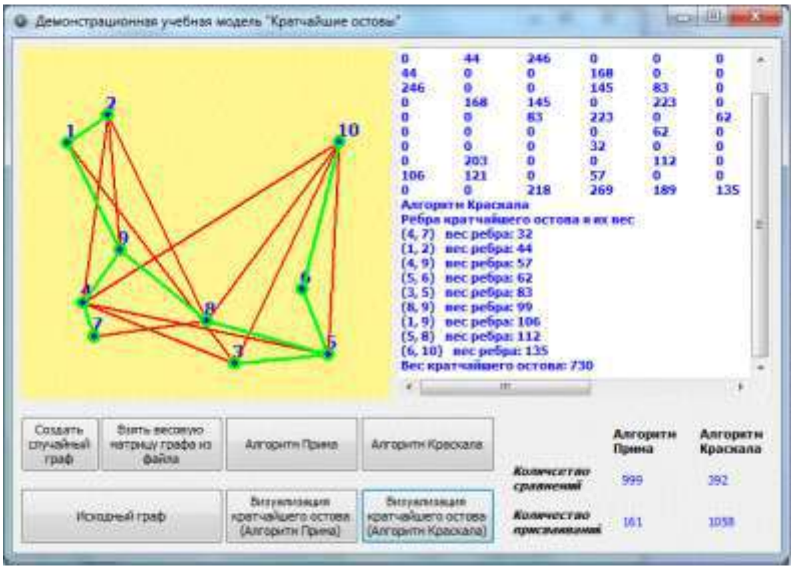

Рис. 20. Визуализация кратчайшего остова,
найденного при помощи алгоритма Краскала

Демонстрационная учебная модель «Кратчайшие пути»

Задача о кратчайшем пути – задача поиска самого короткого пути между двумя вершинами на графе, в которой минимизируется сумма весов рёбер.

Перед тем как использовать учебную модель, учащиеся знакомятся с необходимой теорией по кратчайшим путям, например используя теоретические блоки рассматриваемого программного комплекса (рис. 21–23).

Переходим в демонстрационную учебную модель «Кратчайшие пути». Создадим случайный граф (см. рис. 16). Теперь можно перейти к реализации алгоритмов Дейкстры и Флойда – Уоршелла для поиска кратчайших путей.

Рис. 21. Окно «Кратчайшие пути (определения)»

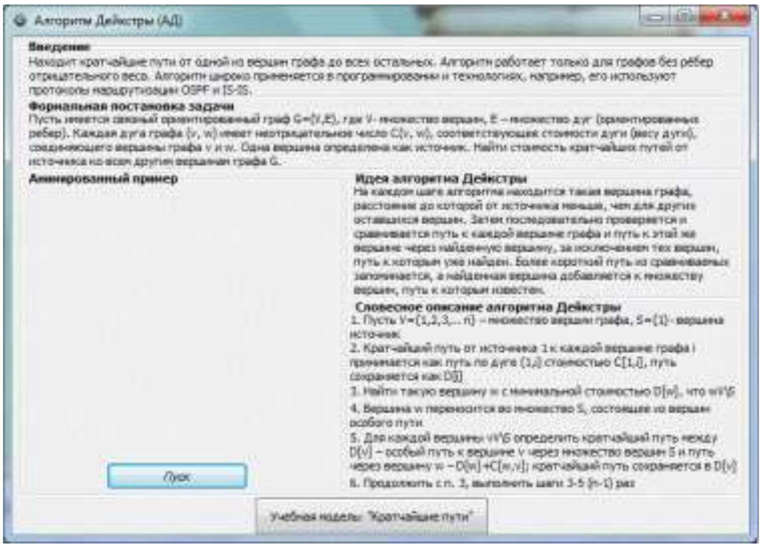

Рис. 22. Окно «Алгоритм Дейкстры»

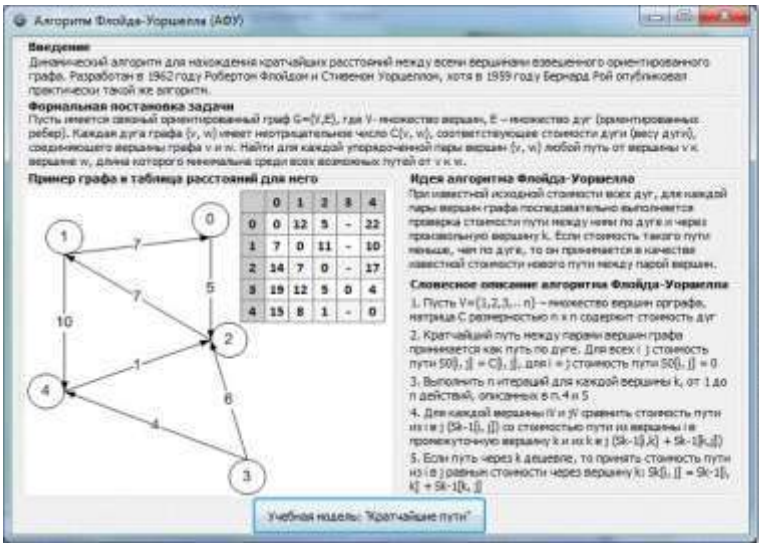

Рис. 23. Окно «Алгоритм Флойда – Уоршелла»

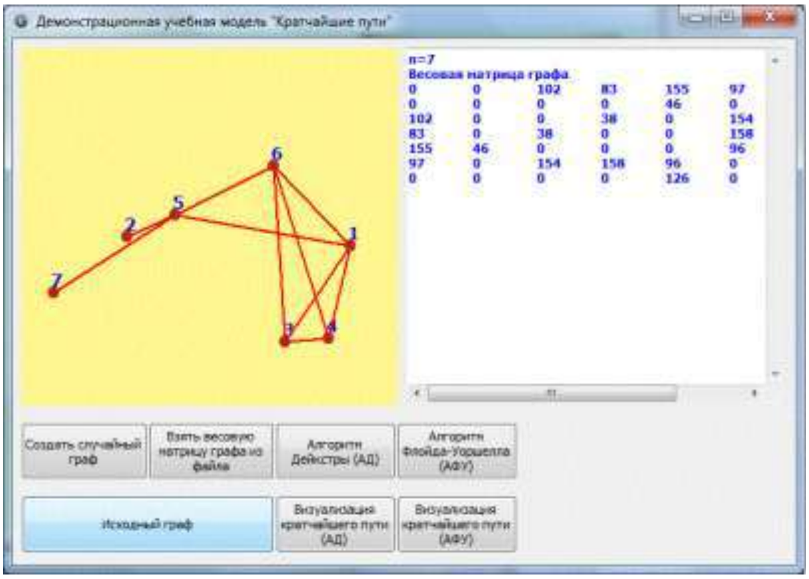

Рис. 24. Визуализация графа с 7 вершинами,
созданного случайным образом

Алгоритм Дейкстры

В учебной модели есть возможность, используя алгоритм Дейкстры, найти кратчайшие пути и их визуализировать из первой вершины во все остальные (рис. 25–27).

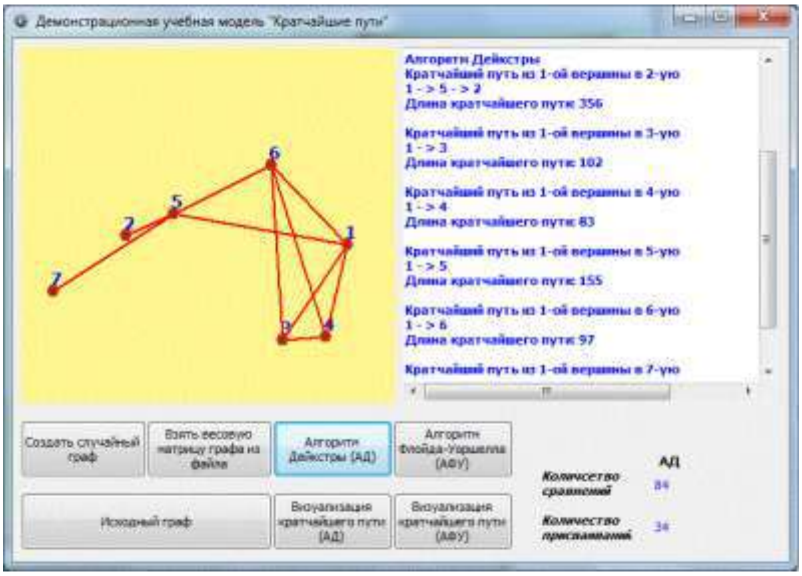

Рис. 25. Результат работы алгоритма Дейкстры

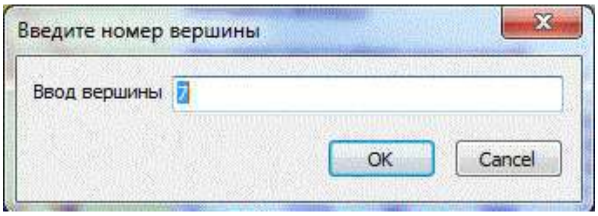

Рис. 26. Окно ввода номера вершины, до которой алгоритм
Дейкстры будет определять кратчайший путь от начальной

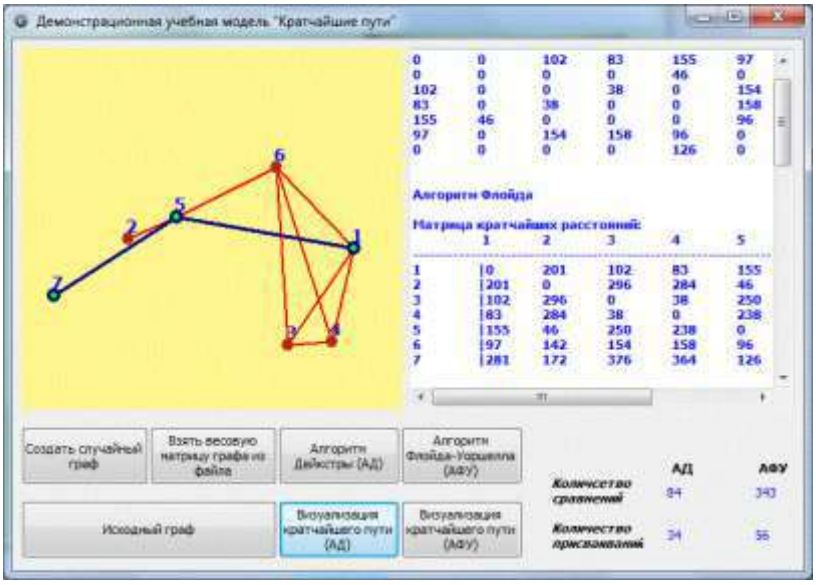

Рис. 27. Визуализация кратчайшего пути

Алгоритм Флойда – Уоршелла

В учебной модели есть возможность, используя алгоритм Флойда – Уоршелла, найти кратчайшие пути и их визуализировать из любой вершины в любую другую. Кроме того, выводится количество операций сравнения и присваивания для обоих алгоритмов (рис. 28).

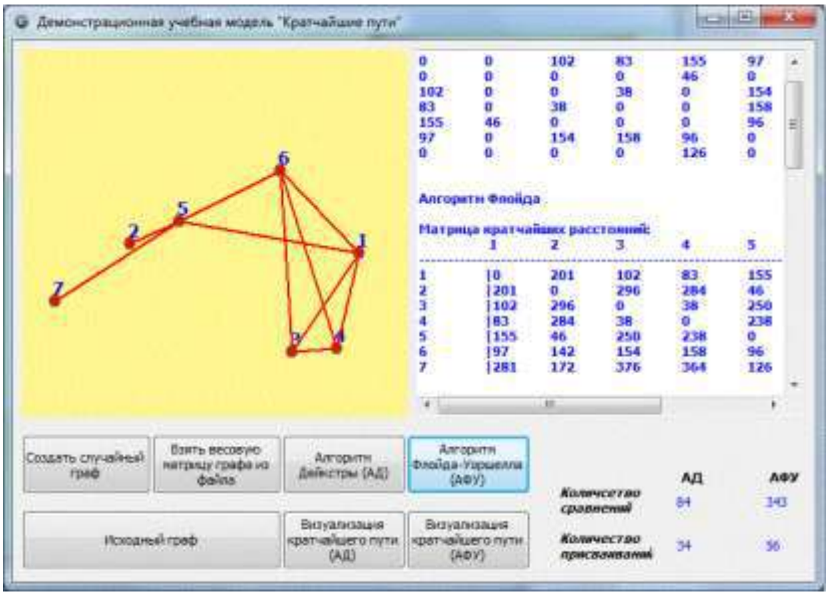

Рис. 28. Результат работы алгоритма Флойда – Уоршелла

Таким образом, применение учебных демонстрационных моделей может дать дополнительные возможности при изучении такого интересного и актуального раздела, как «Алгоритмы на графах».

Литература

1. Березина Л. Ю. Графы и их применение: популярная книга для школьников и преподавателей. М. : URSS, 2018/150 с.

2. Берж К. Теория графов и ее применения. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 325 с.

3. Гладких О. Б., Белых О. Н. Основные понятия теории графов : учеб. пособие. Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2008. 175 с.

4. Демонстрационный вариант КИМ для проведения ГИА 2019 года по информатике. URL: http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 12.11.2019).

5. Демонстрационный вариант КИМ для проведения ЕГЭ 2020 года по информатике. URL: http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 12. 11. 2019).

6. Домнин Л. Н. Элементы теории графов : учеб. пособие. Пенза : Издательство Пензенского государственного университета, 2007. 144 с.

7. Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н. Теория графов: алгоритмы обработки бесконтурных графов. Новосибирск : Наука, 1998.

8. Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н. Теория графов: алгоритмы обработки деревьев. Новосибирск : Наука, 1994.

9. Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб. : БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.

10. Кузьмин О. В. Комбинаторные методы дискретного анализа : учеб. пособие. Иркутск : Издательство ИГУ, 2013. 126 с.

11. Кузьмин О. В. Комбинаторные методы решения логических задач: учебное пособие. М. : Дрофа, 2006. 192 с.

12. Кузьмин О. В. Место дискретной математики в модели математического образования лицеистов // Вест. образования России. Прил. 2015. № 4. С. 36–38.

13. Кузьмина Е. Ю., Лавлинский М. В. Информационно-интегративные связи курса дискретной математики в Лицее ИГУ // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. Иркутск : ИрГУПС, 2015. Вып. 13. С. 81–89.

14. Оре О. Графы и их применение. М. : Мир, 1963. 175 с.

15. Поляков К. Ю. Просто графы //Информатика. 2012. № 3. С. 14–21.

16. Попов В. Б. Delphi для школьников : учеб.-метод. пособие. М. : Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010. 320 с.