

11.12.2021

Тема доклада:

Применение информационных технологий при изучении «Теории вероятностей и математической статистики»

«Душа науки – это практическое применение ее открытий»

У. Томсон

Докладчик:

Лавлинский Максим Викторович,
учитель информатики МАОУ г. Иркутска лицей ИГУ,
e-mail: LavlinskiMV@mail.ru

Научный консультант:

Кузьмин Олег Викторович,
доктор физико-математических наук, профессор,
руководитель Лаборатории педагогического творчества лицея ИГУ

План доклада:

1. Актуальность применения ИТ при изучении ТВ и МС
2. Применение MS Excel
3. Применение Pascal
4. Выводы

1. Актуальность применения ИТ при изучении ТВ и МС

- Использование компьютерных технологий позволяет раскрыть статистическую природу практически всех предусмотренных программой понятий и фактов теории вероятностей
- Посредством компьютерного моделирования можно многие факты теории вероятностей сделать наглядными
- С помощью компьютерных статистических экспериментов можно моделировать описываемые в задачах ситуации и сравнивать получаемые в эксперименте результаты с теоретическими расчетами

2. Применение MS Excel





Моделирование случайных процессов в Excel

Задача 1. Кубики

Двое игроков бросают игральный кубик. Определить результат игры.

Математическая модель:

Исходные данные: x , y – очки, выпавшие у 1-го и 2-го игрока

Выходные данные: результат – кто победил

Связь: $x > y \Rightarrow$ победил 1-ый; $x = y \Rightarrow$ ничья; $x < y \Rightarrow$ победил 2-ой

Компьютерная модель:

Игра "Кубики"	
Имя 1-го игрока:	Томас
У 1-го игрока выпало:	5
Имя 2-го игрока:	Мирослав
У 2-го игрока выпало:	4
Результат	Томас победил

=ЕСЛИ(ИЛИ(ЕПУСТО(B2);ЕПУСТО(B4));"";
СЛУЧМЕЖДУ(1;6))

=ЕСЛИ(ИЛИ(ЕПУСТО(B2);ЕПУСТО(B4));"";
СЛУЧМЕЖДУ(1;6))

=ЕСЛИ(ИЛИ(ЕПУСТО(B2);ЕПУСТО(B4));"";
ЕСЛИ(B3>B5;СЦЕПИТЬ(B2;" победил");
ЕСЛИ(B3<B5;СЦЕПИТЬ(B4;" победил");
"ничья"))))

Задача 2. Парадокс Монти Холла

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей.

За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза.

После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2.

Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?



Монти Холл,
ведущий шоу
Let's Make a Deal
с 1963 по 1991

Решение 1 (теория вероятностей):

- 1) Вы выбрали одну из дверей (Пусть №1)
- 2) Рассмотрим множества:
множество А - выбранная дверь
множество В - оставшиеся двери
- 3) $P(A) = 1/3$ - автомобиль попал в множество А
- 4) $P(B) = 2/3$ - автомобиль попал во множество В
- 5) Открывают проигрышную дверь (пусть №2)

$$P(2) = 0$$

$$P(3) = 2/3$$



Всегда выгодно менять
первоначальный выбор



Парадокс Монти Холла

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей.

За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер **1**, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер **3**, за которой находится коза.

После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер **2**.

Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?



Монти Холл,
ведущий шоу
Let's Make a Deal
с 1963 по 1991

Решение 2 (перебор вариантов):

[x] [] [] - три коробки. [x] - коробка с призом

Всё сводится к трем вариантам:

- 1) (x) [] [] - человек выбрал коробку с призом
- 2) () [x] [] - человек выбрал коробку без приза
- 3) () [] [x] - человек выбрал коробку без приза

Ведущий уберет пустую коробку, останется соответственно:

- 1) (x) []
- 2) () [x]
- 3) () [x]

Парадокс Монти Холла

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер **1**, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер **3**, за которой находится коза.

После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер **2**.

Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Решение 3 (моделирование в Excel):

A. Номер эксперимента (проведём 1000 экспериментов)

B. Генерируем целое число от 1 до 3 (Дверь, за которой автомобиль)

C-E. В этих ячейках «козы» и «автомобили»

F. Выбираем случайную дверь

G. Ведущий выбирает дверь из двух оставшихся

H. *Самое главное:* он не открывает дверь, за которой автомобиль, открывает другую - с козой!

I. Посчитаем шансы. Пока **не будем менять дверь.**

"1" – выиграли, и "0" – проиграли.

J. *Поменяем наш выбор.*

K. Посчитаем шансы. "1" – выигрыш, "0" – проигрыш.

Сумма стремится к **333**

Сумма стремится к **666**

=ЕСЛИ(F2=1;СЛУЧМЕЖДУ(2;3);ЕСЛИ(F2=2;ЕСЛИ(СЛУЧМЕЖДУ(0;1)=0;1;3);СЛУЧМЕЖДУ(1;2)))

=ЕСЛИ(F2=B2;1;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	experiment number	where is the car?	door 1	door 2	door 3	my choise	host blind guess	now he reconsiders if there's a car there	win if I keep my choise	ok, I change my choise	do I win?
1	1	1 car	goat	goat	3	1	2	0	1	1	
2	2	3 goat	goat	car	1	3	2	0	3	1	
3	3	3 goat	goat	car	1	3	2	0	3	1	
4	4	2 goat	car	goat	3	1	1	0	2	1	

=СЛУЧМЕЖДУ(1;3)

=ЕСЛИ(G2=B2;6-G2-F2;G2)

=6-H2-F2

=ЕСЛИ(B2=1;"car";"goat")

=СЛУЧМЕЖДУ(1;3)

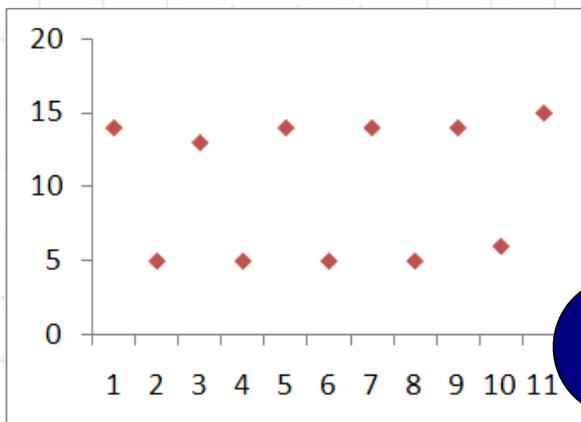
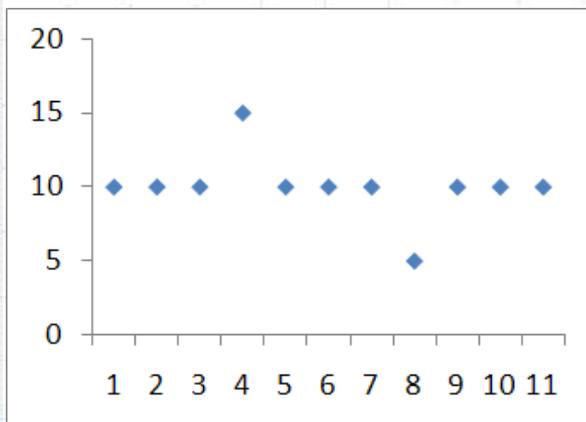
=ЕСЛИ(J2=B2;1;0)

1000	999	1 car	goat	goat	3	2	2	0	1	1
1001	1000	1 car	goat	goat	1	2	2	1	3	0
1002								335		665

Статистические характеристики

Основные свойства (ряд A1:A20):

- количество элементов = **СЧЕТ(A1:A20)**
- количество элементов, удовлетворяющих условию:
= **СЧЕТЕСЛИ(A1:A20;"<5")**
- минимальное значение = **МИН(A1:A20)**
- максимальное значение = **МАКС(A1:A20)**
- сумма элементов = **СУММ(A1:A20)**
- среднее значение = **СРЗНАЧ(A1:A20)**



Для этих рядов
одинаковы МИН,
МАКС, СРЗНАЧ

?

В чем различие?

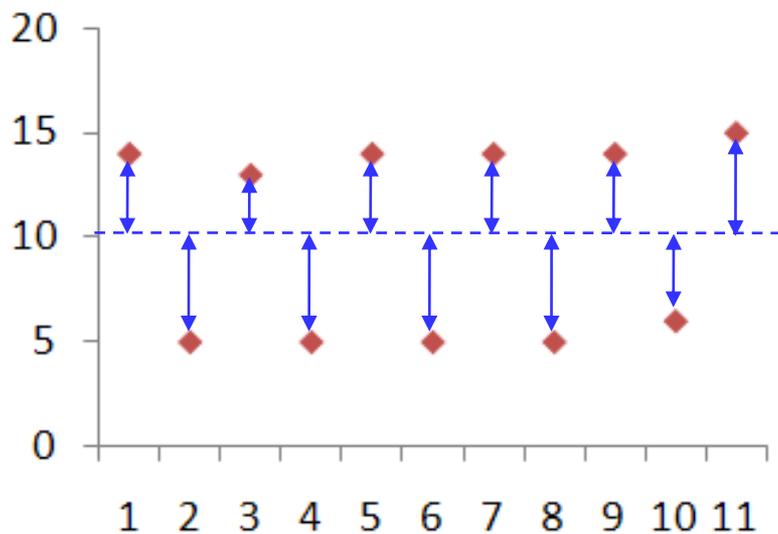
Дисперсия («разброс») – это величина, которая характеризует разброс данных относительно среднего значения.

$$D_x = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$(x_1 - \bar{x})^2$ квадрат отклонения x_1 от среднего

D_x *средний* квадрат отклонения от среднего значения



Стандартная функция
=ДИСПР(A1:A20)

СКВО = среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

=СТАНДОТКЛОНП(A1:A20)

3. Применение Pascal



Моделирование случайных экспериментов

Задача 3.

Смоделировать 50 бросаний игрального кубика. Рассчитать частоты выпадения очков на гранях кубика.

```
program z1;  
const N=50; {Количество испытаний}  
var i,r: integer;  
    F: array[1..6] of integer; {Массив частот}  
begin  
  randomize;  
  for i:=1 to N do begin  
    r:=random(6)+1; {Получение очередного исхода}  
    write(r);  
    inc(F[r]); {Подсчет частоты}  
  end;  
  writeln;  
  for i:=1 to 6 do  
    writeln(i:2,F[i]:6,F[i]/N:8:3);  
  readln;  
end.
```



```
36243452321346623114312431124255565616241221265226  
1      9      0.180  
2     13     0.260  
3      7      0.140  
4      7      0.140  
5      6      0.120  
6      8      0.160
```

Задача 4. (Задача Эйлера)

Три человека пришли в ресторан в одинаковых шляпах, сдали их в гардероб, а уходя, надели их наугад. Найдите вероятность события $B = \{\text{все надели чужие шляпы}\}$ с помощью статистического эксперимента.

Решение:

У опыта 6 возможных исходов (перестановки из 3-ёх элементов)

1	2	3
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

$$n = 6$$

$$m = 2$$

\Rightarrow

$$P(B) = 1/3$$

Ответ: 1/3

Моделирование позволит нам исследовать и общий случай, когда в описанной ситуации участвует N человек.



Л. Эйлер (1707 — 1783)

- Математический анализ
- Дифференциальная геометрия
- Теория чисел
- Астрономия
- Математическая физика
- Оптика
- Баллистика
- Кораблестроение
- Теория музыки



Задача 4. (Задача Эйлера)

Три человека пришли в ресторан в одинаковых шляпах, сдали их в гардероб, а уходя, надели их наугад. Найдите вероятность события **В**={все надели чужие шляпы} с помощью статистического эксперимента.

Идея программируемого решения:

Нужно получить три случайных числа от 1 до 3, причем все они должны быть различны. То есть получить *случайную перестановку*.

N \ k	3	10	100
100	0,34000	0,31000	0,29000
1 000	0,34400	0,36300	0,35500
10 000	0,33740	0,37480	0,36680
100 000	0,33352	0,36839	0,36744
1 000 000	0,33344	0,36715	0,36804

```
program z2;
const k=3; {Количество человек}
var N,i,F: longint;
j,r,x,Count: integer;
      H: array[1..k] of integer;
begin randomize;
{Задаем число испытаний}
write('N='); readln(N);
F:=0;
for i:=1 to N do begin
{Генерация случайной перестановки из k чисел}
  for j:=1 to k do H[j]:=j;
  for j:=k downto 1 do begin
    r:=random(j)+1;
    x:=H[j]; H[j]:=H[r]; H[r]:=x;
  end;
{Сколько шляп надето на свои головы?}
  Count:=0;
  for j:=1 to k do
    if H[j]=j then inc(Count); {Подсчет частоты}
  if Count=0 then inc(F);
end;
writeln(F/N:7:5);
readln;
end.
```



К чему стремится вероятность события **В** с увеличением количества людей? $\rightarrow \frac{1}{e}$

Вычисление числа π . Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло

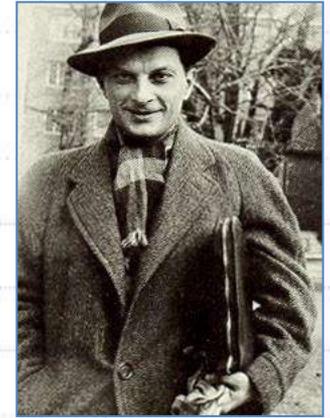
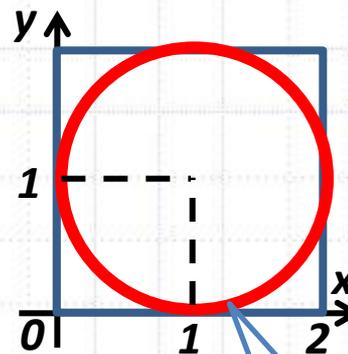
— метод основанный на моделировании случайных величин.

*Систематически изложили в 1949 г.,
Метрополис и Улам*

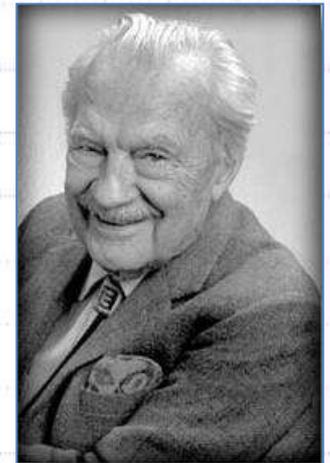
Для вычисления π используем формулу $S_{кр} = \pi \cdot R^2$

Применение метода Монете-Карло:

- 1) Рассмотрим круг $R=1$, с центром в точке $(1, 1)$
- 2) Круг вписан в квадрат, $S_{кв} = 2 \times 2 = 4$
- 3) Выберем внутри квадрата N **случайных точек** (зададим их координаты: числа x и y)
- 4) Обозначим $N_{кр}$ - число точек, попавших при этом внутрь круга
- 5) Точка принадлежит квадрату, если:
 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
- 6) Точка попадает в круг, если: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$



С. Улам
(1909 – 1984)

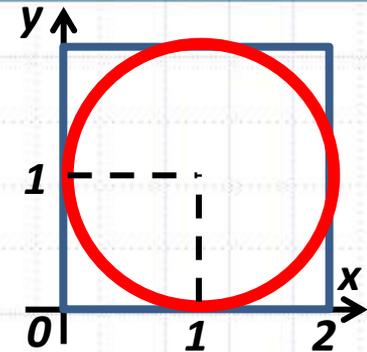


Н.К. Метрополис
(1915 – 1999)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

π

$$\frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{N_{\text{круга}}}{N} \Rightarrow S_{\text{круга}} = \frac{S_{\text{квадрата}} \cdot N_{\text{круга}}}{N}$$



$$\Rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{N_{\text{круга}}}{N}$$

```

program z3;
var i, n, n1: longint;
    x, y, p: real;
begin randomize;
write('n='); readln(n);
for i:=1 to n do begin
  x:=2*random; y:=2*random;
  if sqr(x-1)+sqr(y-1)<=1 then n1:=n1+1;
end;
p:=4*n1/n;
writeln('pi=',p:15:11);
readln;
end.

```

N	Результат
50	2,8000000000
50	3,2800000000
50	3,2800000000
600	3,1400000000
600	3,1266666667
600	3,2333333333
2500	3,1408000000
2500	3,1008000000
2500	3,0784000000
5000	3,1184000000
5000	3,1280000000
5000	3,1656000000
10000	3,1404000000
1000000	3,1440640000
1000000000	3,1440640000

Статистические характеристики

Задача 5.

Написать программу для нахождения статистических характеристик (среднее арифметическое, размах, мода, медиана) выборки. Исходные данные должны считываться из файла input.txt. Выходные данные должны записываться в файл output.txt.

input.txt

```
21 18.5 25.3 18.5 17.9
```

output.txt

```
|srednee znachenie: 20.2400  
razmah: 7.4000  
mediana: 18.5000  
moda[1]: 18.5000
```

4. Выводы

Результатом применения в курсе стохастики данных средств должно стать развитие образного и логического мышления обучающегося, привитие навыков моделирования процессов и явлений, использования численного эксперимента, анализа и интерпретации результатов.