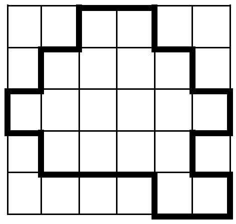
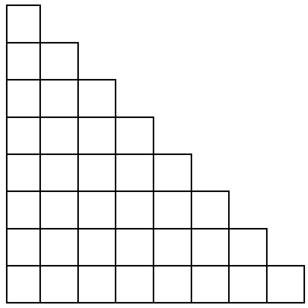
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 5 класс

1. Если Петя идет в школу пешком, а возвращается на автобусе, то всего он тратит на дорогу 1 час 30 минут. Если же он едет на автобусе туда и обратно, то тратит на дорогу 30 минут. Автобус едет в обе стороны с одной скоростью. Сколько времени у Пети займет дорога туда и обратно, если он будет идти пешком?
2. Существуют ли три натуральных числа, попарные суммы которых равны 513, 514, 515?
3. Разрежьте фигуру по границам клеток на три одинаковые части.
4. Из попарно различных цифр, обозначенных буквами П, Е, Т, Р, О, В, составлено шестизначное число ПЕТРОВ. Докажите, что произведение ПЕТРОВ · П · Е · Т · Р · О · В делится на 3.
5. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2013. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если оно делится на 50, то его делят на 50, если не делится, то из него вычитают единицу (старое число заменяется на новое). Найдите наибольшее из чисел на доске через 35 минут.



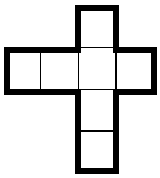
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 6 класс

1. Существуют ли три натуральных числа, попарные суммы которых равны 2012, 2013, 2014?
2. В классе 26 школьников, среди них отличница Маша. Учитель спросил у каждого из них, кроме Маши, сколько у них друзей среди остальных. В ответ прозвучали только числа 3 и 5. Докажите, что если все говорят правду, то у Маши есть друг (или подруга).
3. В магазине продаются наборы из трех видов канцелярских товаров: ручек, по цене 14 руб. 76 коп., карандашей, по цене 1 руб. 40 коп., и кнопок по 64 коп. за штуку. (В наборе может быть различное количество ручек, карандашей и кнопок). Может ли цена одного из таких наборов быть равной 100 рублям?
4. Разрежьте лесенку, изображенную на рисунке, по линиям сетки на три части и сложите из них квадрат.
5. Назовём набор различных натуральных чисел от 1 до 9 «*хорошим*», если сумма чисел, входящих в него, чётна. Сколько существует «*хороших*» непустых наборов?



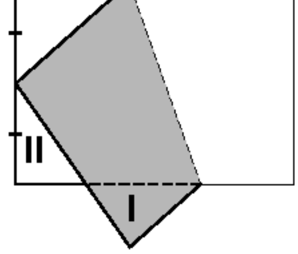
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 7 класс

1. Докажите, что $3^{2012} + 3^{2013} + 3^{2014}$ делится на 13.
2. Вася съедает в день или 3 сосиски и 1 котлету, или 5 сосисок и 3 котлеты, или 4 сосиски и 2 котлеты. За несколько дней Вася съел 100 котлет. Мог ли он за тот же период съесть 166 сосисок?
3. Найдите все натуральные числа $n > 2$, такие, что $n^2 - 4$ – простое число.
4. На данном поле играют двое – первый крестиками, а второй ноликами. Ходят по очереди. Цель – поставить 3 или более своих знаков подряд. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?
5. Из прямоугольника, нарисованного «по клеточкам», удалили прямоугольную часть, содержащую правый нижний угол, но не содержащую других углов прямоугольника. Докажите, что количество способов поместить в полученной фигуре уголок из трех клеточек нечётно.



Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 8 класс

1. Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ (n – натуральное) равняться 2013?
2. Найдите сумму $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2012}{2013!}$. ($n!$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n).
3. Найдите все такие натуральные n, что число $n!$ не делится ни на $n + 1$, ни на $n + 2$.
4. Прямоугольный лист согнули, соединив вершину с серединой короткой стороны (см. рисунок). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая сторона равна 8 см.
5. Клетчатая доска размером 4 × 7 покрашена в два цвета: каждая клетка либо черная, либо белая. Докажите, что найдётся прямоугольник, стороны которого параллельны сторонам доски, а вершины лежат в центрах четырех клеток одного цвета.



Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 9 класс

1. Футбольная команда сыграла в турнире 50 матчей и набрала 67 очков. Могла ли эта команда в 2 раза меньше матчей выиграть, чем проиграть? (Победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0.)
2. Делится ли число $21^{10} - 1$ на 2200?
3. Можно ли сложить сплошную стенку, имеющую форму параллелепипеда с размерами 27 х 16 х 15 из кирпичей размером 2 х 5 х 6, если ломать кирпичи нельзя, но можно поворачивать?
4. Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество фишек так, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно две фишки, а в любом прямоугольнике 3×1 – ровно одна фишка? (В каждой клетке может стоять не более одной фишки.)
5. На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки K, M и N соответственно так, что угол MKB равен углу MNC, а угол KMB равен углу KNA. Докажите, что NB – биссектриса угла MNK.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 10 класс

1. В футбольном турнире в один круг (каждая команда играет с каждой один раз) участвовало 6 команд. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. Сколько матчей закончилось вничью?
2. Квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет два различных действительных корня, а трехчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трехчлена произведение корней отрицательно.
3. Точку внутри треугольника соединили отрезками с тремя точками, взятыми по одной на каждой стороне. Докажите, что если из трех образовавшихся четырехугольников два являются вписанными, то и третий четырехугольник также является вписанным.
4. Решите в натуральных числах уравнение $7^n + 15 = 4^k$.
5. Положительные числа a, b, c такие, что $a \ge b \ge c$ и $a + b + c \le 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \le 1$.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, Иркутск, 2013, 11 класс

1. На доске записаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?
2. Решите уравнение: $4\cos \pi x = 4x^2 - 4x + 5$.
3. Известно, что $a > b > c$. Докажите, что $\dfrac{a^2}{a-b} + \dfrac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$.
4. В некоторых клетках квадратной таблицы стоят фишки (в клетке может быть не более одной фишки). Клетка называется красивой, если и в содержащей ее строчке стоит нечетное число фишек, и в содержащем ее столбце стоит нечетное число фишек. (В красивой клетке фишка может стоять, а может и не стоять.) Может ли в таблице быть ровно 998 красивых клеток?
5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AC отмечена точка K так, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.